



VŠB-Technická univerzita Ostrava  
Fakulta stavební  
Studentská vědecká odborná činnost  
Školní rok 2011-2012

## **Interakce základových pásů se základovou půdou**

Předkládá student : Michael Macháček  
Odborný konzultant : doc. Ing. Janas Petr, CSc.  
katedra : 228

## Obsah

1	Úvod .....	4
2	Modely podloží .....	4
2.1	Winklerův pružný podklad .....	4
2.2	Pasternakův dvouparametrický model podloží .....	4
3	Řešení příčné úlohy pomocí ODM.....	5
3.1	Winklerův model podloží.....	5
3.1.1	Přibližné schéma výpočtu Winklerova modelu .....	5
3.1.2	Vyloučení tahových namáhání zeminy.....	6
3.2	Pasternakův modelu podloží.....	7
3.2.1	Přibližné schéma výpočtu Pasternakova modelu.....	7
3.2.2	Konvergence ke správnému řešení .....	9
3.3	Příklady řešení výpočtových modelů v příčné úloze .....	10
3.3.1	Příklad č.1 Centrické zatížení .....	10
3.3.2	Příklad č.2 Excentrické zatížení .....	12
4	Metoda konečných prvků.....	15
4.1	Postup výpočtu .....	15
4.2	Příklad řešení - základová patka.....	15
5	Porovnání deformací dvou výpočetních přístupů .....	17
6	Kontrola správnosti výpočtu .....	19
7	Závěr .....	19
	Použité Materiály .....	20
	Poděkování.....	20

## **Abstrakt**

Interakce základové půdy se základovými konstrukcemi je důležitá část stavební mechaniky, obzvláště pro staticky neurčité konstrukce, kde každý milimetr sednutí hraje velký význam pro vnitřní síly celé konstrukce.

Proto jsem se rozhodl zkusit tento problém řešit a porovnat dva modely podloží a to model pružného podloží (Winkler) s dvouparametrickým modelem (Pasternak). Problém jsem izoloval pouze na řešení interakce základu se zeminou v příčné úloze a plošné úloze.

Výpočet je proveden obecnou deformační metodou a metodou konečných prvků. Pro výpočet jsem naprogramoval vlastní aplikaci v programu Matlab.

## **Abstract**

Interaction between foundation ground with building structures is an important part of a building mechanics, especially for statically indeterminate constructions where every millimetre of settling has a huge impact on internal force of the whole construction.

Therefore I have decided to solve this problem by comparing two models of subsurface – a model of flexible subsurface (Winkler) with a double-parameter model (Pasternak). I have isolated the problem only on the solution of interaction between foundation ground with natural soil in the transversal task.

The calculation has been done using general deformation method and Finite Element Method. I created my own application in Matlab for this calculation.

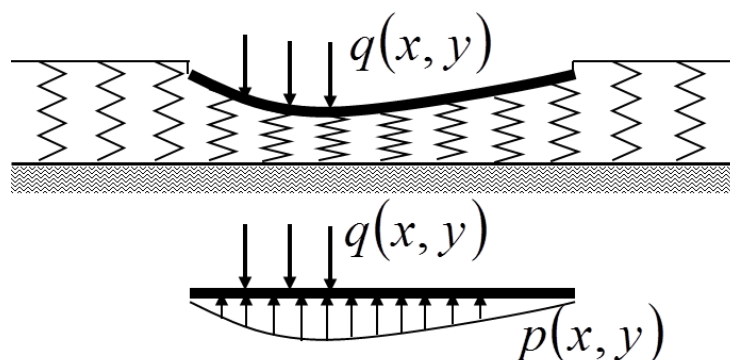
# 1 Úvod

Nosník na pružném podkladu je nosník, který je spojitě podepřen, nebo obklopen podložím buď po celé délce anebo části své délky. Vlivem zatížení se nosník deformuje a vtlačuje do podloží. Dochází tedy k průhybu nosníku a zároveň také ke stlačování podloží, proto je to úloha staticky neurčitá. Úlohy řešení nosníků na pružném podkladu se vyskytují při řešení základů různých staveb a konstrukcí například při vyztužování v dolech, tunelech a výkopových pracích, při navrhování kolejnic v železniční dopravě, v lodním stavitelství, při sportu (např. lyže na sněhu), při výpočtu namáhání mostních plovoucích pontonových konstrukcí.

## 2 Modely podloží

### 2.1 Winklerův pružný podklad

Pružný podklad tzv. Winklerův je nejjednodušším modelem podloží. Napětí pod základem je přímo úměrné průhybu základu. Konstantou  $C_1$  se vyjadřuje poměr napětí a průhybu. Zanedbává smykové napětí v zemině, plastická přetvoření nejsou možná. Winklerův model je jednoparametrický model. Lze jej znázornit jako soubor pružin samostatně působících na kontaktu základu a podloží. Mimo základ se pružiny simulující podloží nedeformují, což neodpovídá realitě (obr. 1).

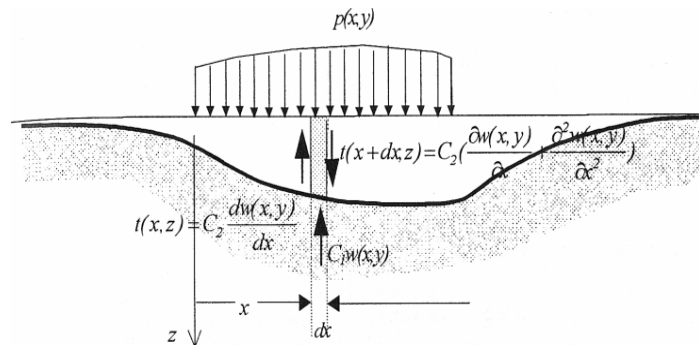


Obr. 1: Winklerův pružný podklad (převzato z [1])

### 2.2 Pasternakův dvouparametrický model podloží

Pasternakův model je modifikace Winklerova modelu. Winklerův model je rozšířen o parametr  $C_2$ , který zohledňuje roznoš smykového napětí v zemině, což znamená, že uvažujeme v podloží s normálovými silami i silami smykovými.

Nespojitě zaboření základu dle Winklera je u Pasternaka nahrazeno průhybovou kotlinou (obr. 2).



Obr. 2: Pasternakův dvouparametrický model podloží (převzato z [1])

### 3 Řešení příčné úlohy pomocí ODM

#### 3.1 Winklerův model podloží

Nosník na pružném podkladě jsem řešil jako příčnou úlohu pomocí obecné deformační metody. Aplikaci jsem vytvářel v programu Matlab.

##### 3.1.1 Přibližné schéma výpočtu Winklerova modelu

- definování nosníku s ,n' monolitickými styčnicí
- sestavení matice tuhosti celého nosníku
- přičtení tuhosti „zemních pružin“ k diagonále matice tuhosti (1), tuhost zemní pružiny při okraji je poloviční
- sestavení primárního vektoru koncových sil (zatížení převádím pouze na styčnicové)
- vyřešení soustav rovnic
- výpočet vnitřních sil
- kontrola suma všech sil
- z vypočtených průhybů vypočteme sílu v pružinách (2), z které jsme schopni vypočítat kontaktní napětí v základové spáře (3).

$$K_p = C_1 \cdot dx \cdot b \quad (1)$$

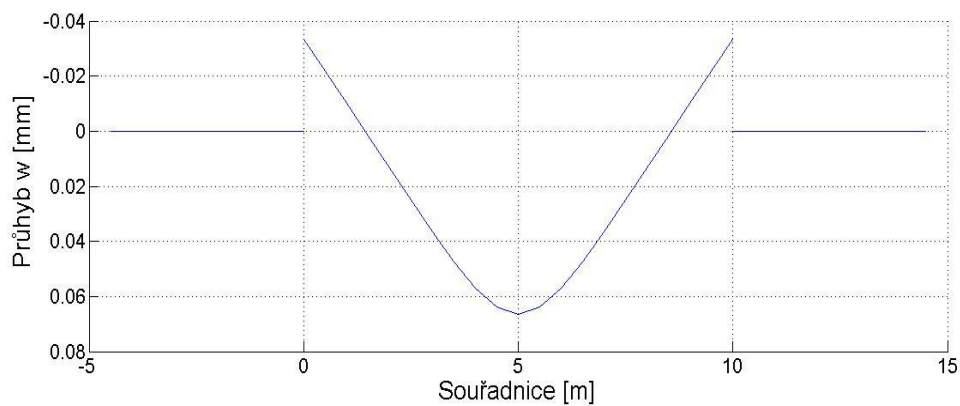
$$F_z(i) = w(i) \cdot K_p(i) \quad (2)$$

$$\sigma_z(i) = \frac{F_z(i)}{dx \cdot b} \quad (3)$$

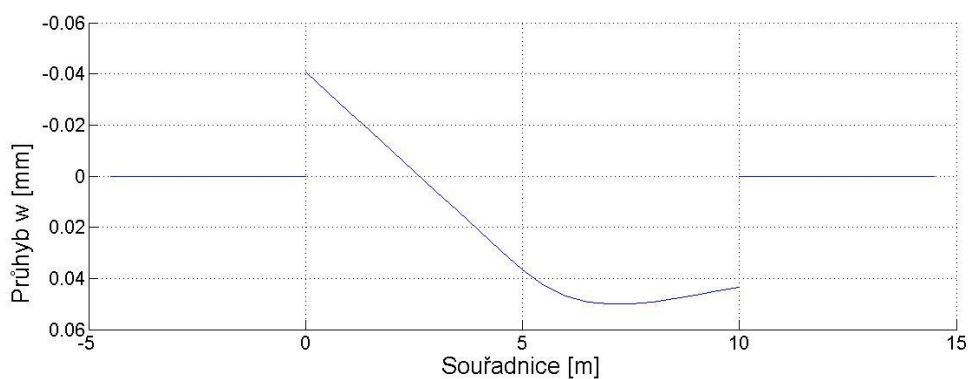
### 3.1.2 Vyloučení tahových namáhání zeminy

Klasické Winklerovo vyjádření zemní pružiny znamená, že pružina může působit i v tahu. Reálně však zemina není schopna přenášet kladné (tahové) napětí. Tento problém nastává, pokud na relativně poddajný základový pás působí velké osamělé břemeno (Obr. 3) nebo pokud je jakýkoliv základový pás zatížen nesymetricky či momentem (Obr. 4).

Tento problém jsem ošetřil modifikací Winklerova modelu. Před celý výpočet jsem vložil cyklus s podmínkou. Pokud je průhyb  $w(i)$  záporný (tedy směrem vzhůru), pak se k matici tuhosti konstrukce nepřičte matice tuhosti zemních pružin a výpočet se opakuje. Cyklus se ukončí, až se přestane měnit matice tuhosti konstrukce.



Obr. 3: Poddajný nosník centricky zatížen



Obr. 4: Nosník excentricky zatížen

## 3.2 Pasternakův modelu podloží

Použil jsem již fungující aplikaci pro výpočet Winklerova modelu, který jsem rozšířil o smykovou sílu (6). Pro výpočet druhé derivace jsem použil numerické derivace pomocí konečných diferencí (5).

$$S(x) = -C_2 \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (4)$$

$$\left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_i = \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (5)$$

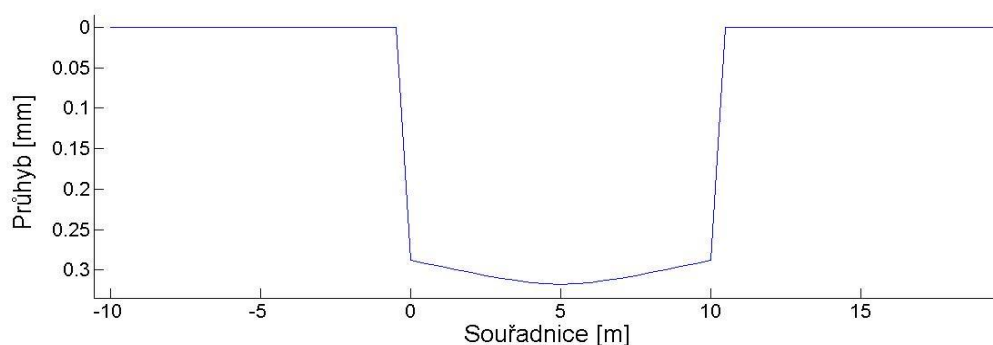
$$S(i) = -C_2 \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (6)$$

Smykovou sílu můžeme vyjádřit z funkce deformací, tato smyková síla ovlivní opět deformace proto je nutné tento výpočet provést iteračně.

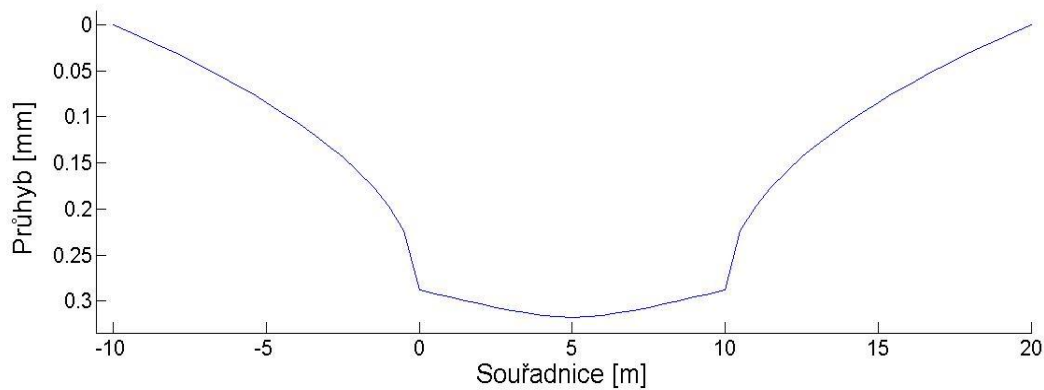
Pro výpočet smykových sil pomocí konečných diferencí je nutné znát minimálně jeden průhyb před a jeden za základovým pásem. Tyto průhyby jsem stanovil umístěním pružin i mimo základ, které budou stlačovány pouze smykovými silami a vytvoří tak průhybovou kotlinu.

### 3.2.1 Přibližné schéma výpočtu Pasternakova modelu

- výpočet Winklerova modelu pro dané zatížení (obr. 5)
- kvůli mnohonásobně rychlejší iteraci zavádím nulovou iteraci. Průhyby mimo základ vyjádřím křivkou, která se odhadem blíží výsledné křivce průhybové kotliny
- pro jednoduchost jsem zvolil parabolu druhého stupně (obr. 6)

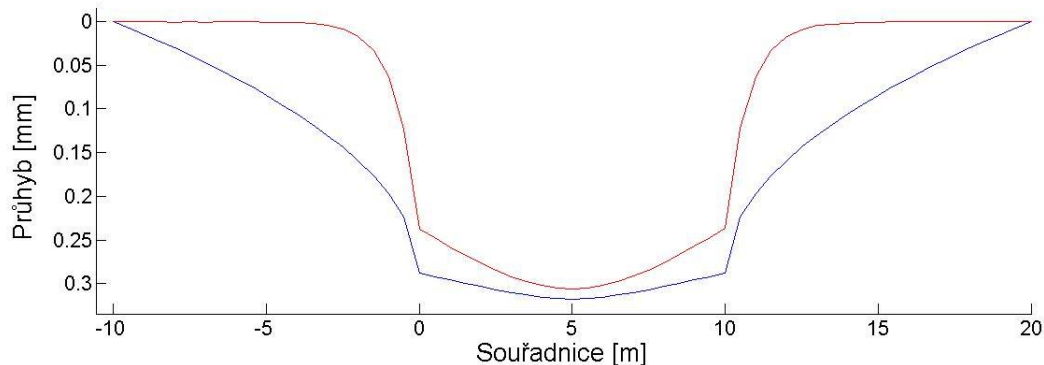


Obr. 5: Deformace s Winklerovým modelem



Obr. 6: Deformace s Winklerovým modelem a nultou iterací kolem základů

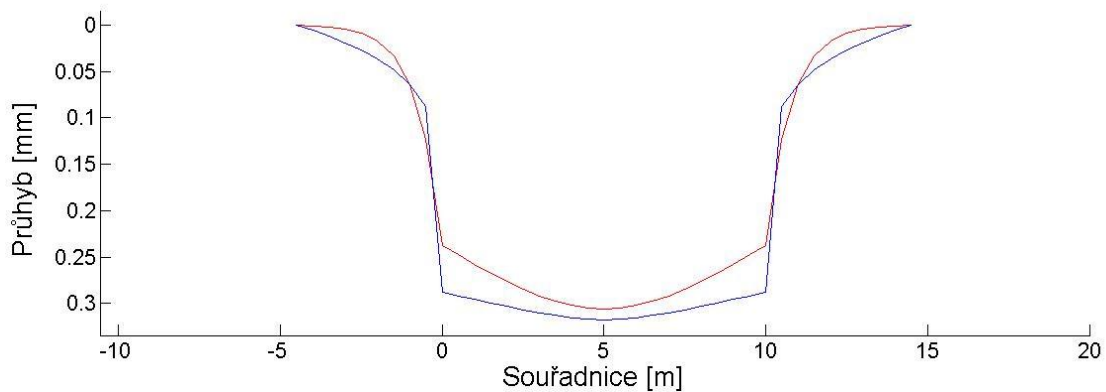
- spustí se iterační cyklus
  - vypočítají se smykové síly
  - smykové síly se přičtou k primárnímu vektoru koncových sil a jsou jediné síly, které působí na pružiny mimo základ
  - vypočítají se průhyby a cyklus se opakuje, dokud výsledek nezačne oscilovat kolem přesného řešení s námi zvolenou odchylkou



Obr. 7 Deformace s Pasternakovým modelem (červeně), nultá iterace (modře)

Na obr. 7 jde vidět, že nultá iterace je dost nepřesná od řešení průhybu pomocí Pasternakova modelu. Aproximační křivku jsem zvolil parabolou 2. Stupně. Pro minimalizaci iteračních kroků lze tuto aproximační křivku vyladit. Ladění je velmi důležité pro úlohy plošných modelů, kde počet rovnic roste kvadraticky s počtem dělicích prvků. Například parabola 6. stupně je mnohem výhodnější (obr. 8).





Obr. 8 Výhodnější tvaru nulté iterace

### 3.2.2 Konvergence ke správnému řešení

Zjistil jsem, že tato iterační metoda nevede vždy k řešení. Jsou případy, kdy toto řešení divergovalo.

Když se zamyslíme, zjistíme, že smykové síly jsou počítány jako druhá derivace průhybů pomocí konečných diferencí. Jenže v místě kraje základu a navazující zeminy se vyskytuje ve funkci průhybů zlom. Směrnice tečny je jiná, když se blížíme k tomuto zlomu zleva nebo zprava.

Navíc pokud Pasternakův model vychází z Winklerova modelu, tak v prvních iteračních krocích je skok z nulového průhybu až na průhyb na kraji základu. Tento skok se nezmenšuje při dělení na větší počet dílků, tudíž se smyková síla zvětšuje s klesající tuhostí pružin, což vede k tomu, že iterační proces diverguje. To byl ne jeden z důvodů, proč jsem vymyslel nultou iteraci, bohužel zlom ani nultá iterace nevyřešila. Zlom se v průběhu iterace důsledkem smykových sil mění na spojitou hladkou funkci za předpokladu velmi drobného dělení.

Navrhl jsem řešení omezení maximální změny průhybu  $d_{wmax}$ . Iterační proces probíhá pořád stejně, ale pokud v jednotlivých průhybech mezi iteračními kroky bude větší rozdíl než  $d_{wmax}$  dosadí se rozdíl  $d_{wmax}$ . Navrhovaný postup značně tlumí rozkmit iterace a vede ke konvergenci iteračního procesu k výsledku. Takto zvolené  $d_{wmax}$  znamená, že konstrukce může oscilovat od přesného řešení v maximálním rozkmitu  $\pm d_{wmax}$ .

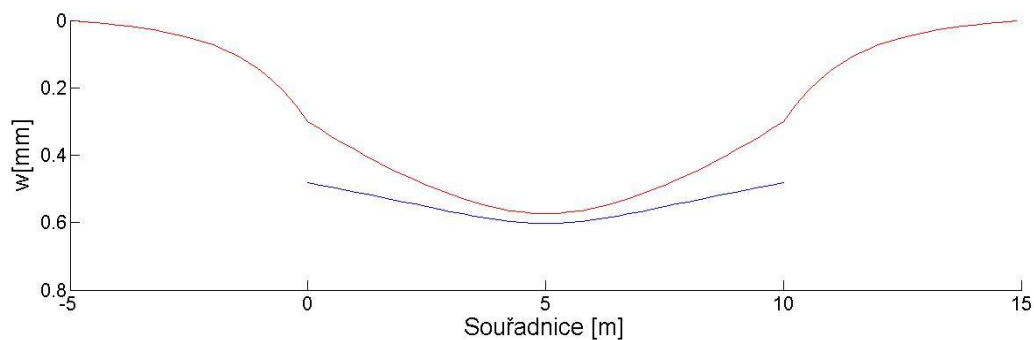
### 3.3 Příklady řešení výpočtových modelů v příčné úloze

#### 3.3.1 Příklad č.1 Centrické zatížení

Zadání:  $l = 10\text{m}$   
 $b = 1\text{m}$   
 $h = 0,5\text{m}$   
 $F = 10\text{kN}$   
 $q = 10\text{kN/m}^2$   
 $E = 23000\text{kPa}$

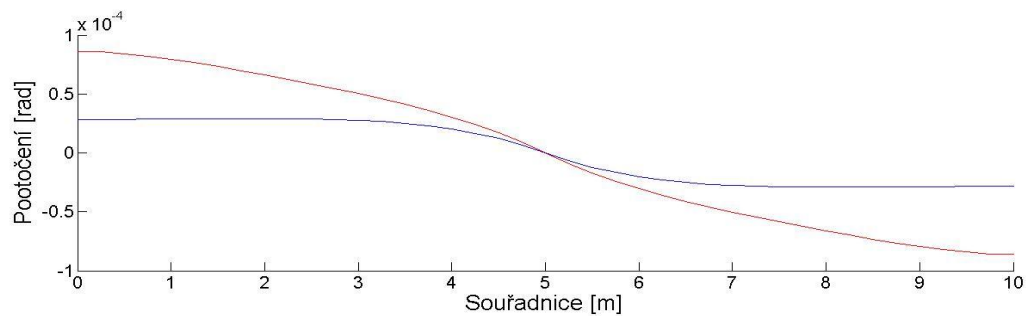
Součinitel poddajnosti  $C_1 = 20000\text{ kN/m}^3$ . Součinitel přenášení smykových sil  $C_2 = 10000\text{ kN/m}$ . Zatíženo spojitým zatížením ( $q$ ) po celé délce nosníku a silou ( $F$ ) uprostřed.

#### Průhyb



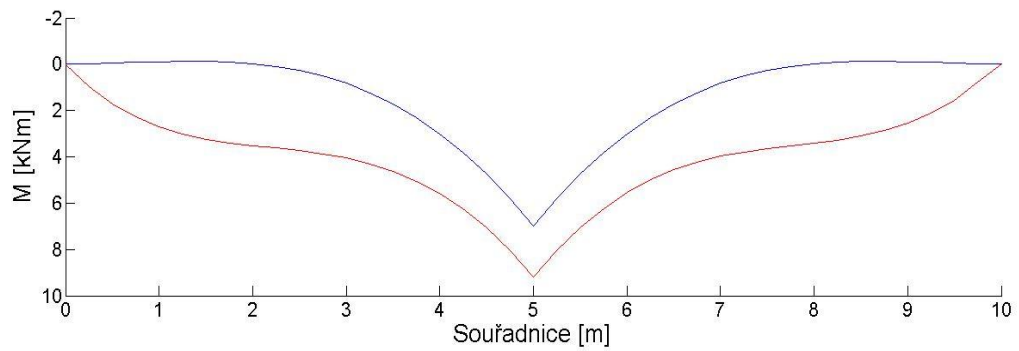
Obr. 9 Průhyb [mm]

#### Pootočení



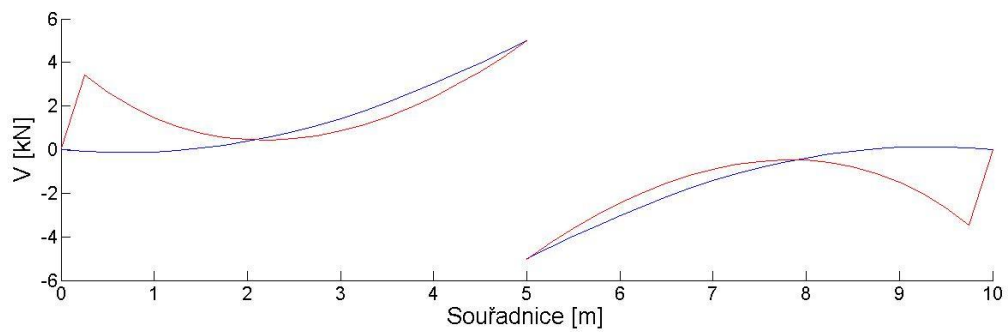
Obr. 10 Pootočení [rad]

## Ohybové momenty



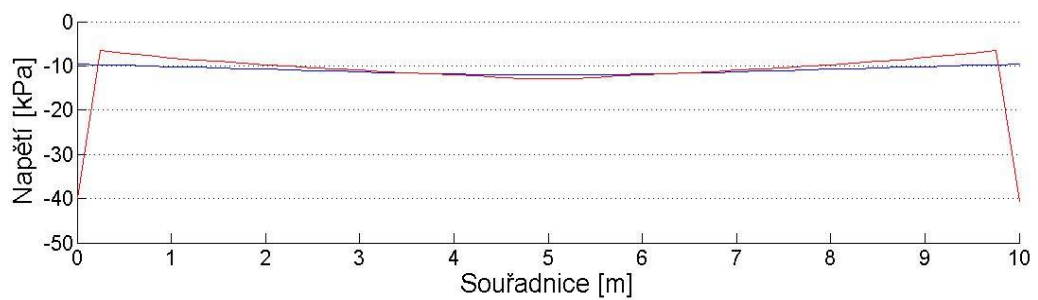
Obr. 11 Ohybové momenty [kNm]

## Posouvající síly



Obr. 12 Posouvající síly [kN]

## Napětí v základové spáře



Obr. 13 Napětí v základové spáře [kPa]

## Porovnání výsledků

Ohybové momenty (obr. 11)

$M_{\max, \text{konst}} = 12,5 \text{ kNm}$  (Předpoklad konstantního napětí v zkl. spáře)

$M_{\max, W} = 7.0 \text{ kNm}$  (Winklerův model)

$M_{\max, P} = 9.2 \text{ kNm}$  (Pasternakův model)

Posunutí (obr. 9)

$W_{\max, W} = 0.60 \text{ mm}$  (Winklerův model)

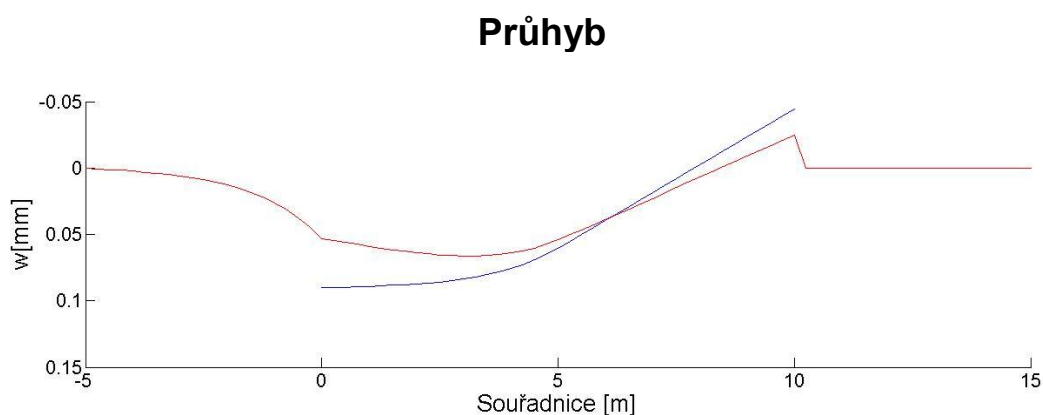
$W_{\max, P} = 0.57 \text{ mm}$  (Pasternakův model)

V tomto případě je předpoklad konstantního napětí v základové spáře pro výpočet ohybových momentů nejkonzervativnější. Použitím Pasternakova modelu podloží by bylo možné navrhnout ekonomičtější základový pás, naopak zanedbání smykových sil vede k poddimenzování konstrukce. Dle Pasternakova modelu vychází posuny o cca 5% menší. Tento rozdíl může mít velký vliv na namáhání konstrukce staticky neurčité.

### 3.3.2 Příklad č.2 Excentrické zatížení

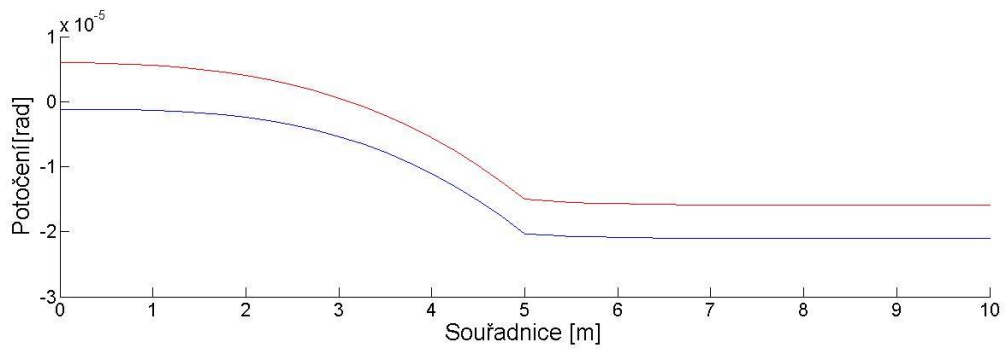
Zadání:  $l=10 \text{ m}$   
 $b=1 \text{ m}$   
 $h=1 \text{ m}$   
 $F=10 \text{ kN}$   
 $M=20 \text{ kNm}$   
 $E=23000 \text{ kPa}$

Součinitel poddajnosti  $C_1=20000 \text{ kN/m}^3$ . Součinitel přenášení smykových sil  $C_2=10000 \text{ kN/m}$ . Zatíženo pouze uprostřed nosníku silou (F) a momentem (M).



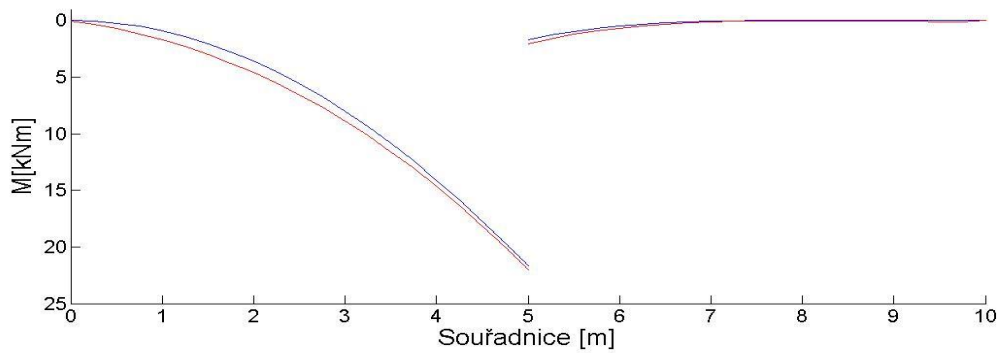
Obr. 14 Deformace [mm]

## Pootočení



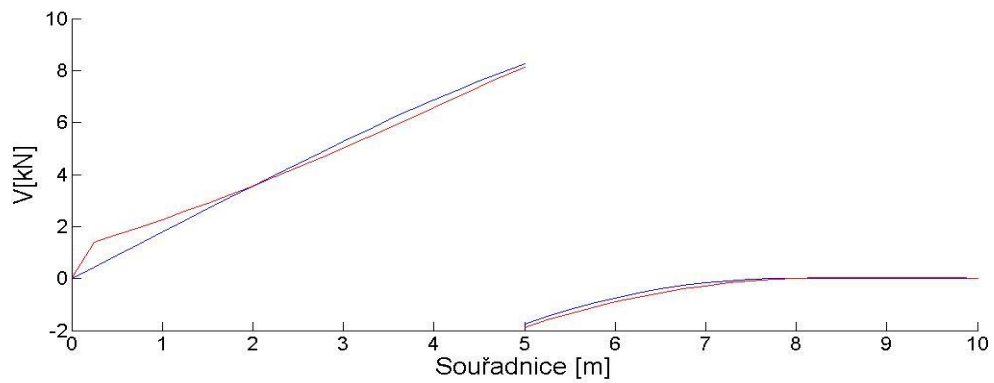
Obr. 15 Pootočení [rad]

## Ohybové momenty



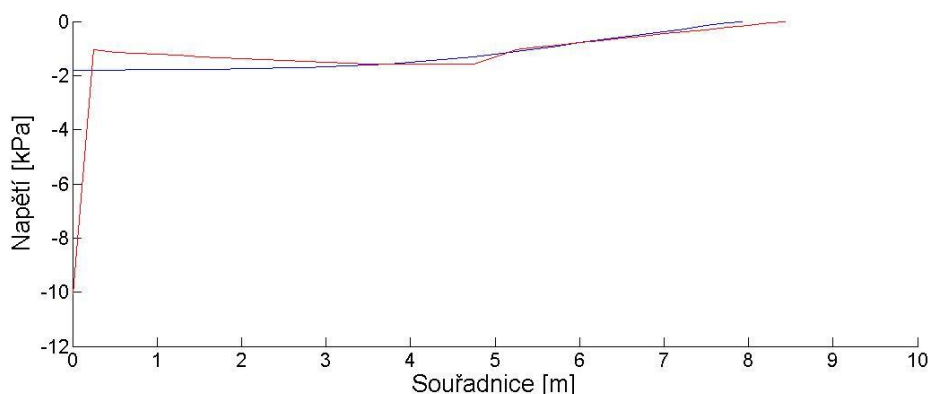
Obr. 16 Ohybové momenty [kNm]

## Posouvající síly



Obr. 17 Posouvající síly [kN]

## Napětí v základové spáře



Obr. 18 Napětí v základové spáře [kPa]

## Porovnání výsledků

Ohybové momenty (obr.16)

$M_{\max, \text{konst}} = 20,83 \text{ kNm}$  (Předpoklad konstantního napětí v základové spáře)

$M_{\max, W} = 20.17 \text{ kNm}$  (Winklerův model)

$M_{\max, P} = 19.66 \text{ kNm}$  (Pasternakův model)

Posunutí (obr.14)

$W_{\max, W} = 0.13 \text{ mm}$  (Winklerův model)

$W_{\max, P} = 0.08 \text{ mm}$  (Pasternakův model)

I v tomto případě je předpoklad konstantního napětí v základové spáře pro ohybové momenty nejkonzervativnější, ale dle Winklerova modelu vychází ohybové momenty větší než dle Pasternaka.

Posunutí je opět menší dle Pasternaka v tomto případě cca o 37%! V tomto případě smykové síly velmi podstatně ovlivňují výpočet a je nutné s nimi počítat.

## 4 Metoda konečných prvků

Obecnou deformační metodou v příčné úloze jsem ověřil funkčnost zvoleného přístupu a mohl jsem relativně jednoduše ošetřit výše uvedené problémy pro výpočet pomocí metody konečných prvků. Pomocí příčné úlohy vychází i přibližné výsledky, které by se neměli podstatně lišit od deskové úlohy.

Úloha je řešena jako tenká deska na pružném podloží pomocí Winklerova i Pasternakova modelu. Pro výpočet je využita Kirchhoffova teorie tenkých desek, která je řešena metodou sítí a metodou konečných prvků.

Po sestavení programů pro výpočet deskových konstrukcí, pomocí metody konečných prvků i metody sítí, jsem dospěl k závěru, že MKP je mnohem flexibilnější, co se týče okrajových podmínek. Záměrem mé práce nejsou jen obdélníkové základové desky ale i složitější tvary, u kterých by okrajové podmínky pomocí Metody sítí působily značné problémy. Proto se následující text zabývá pouze MKP.

### 4.1 Postup výpočtu

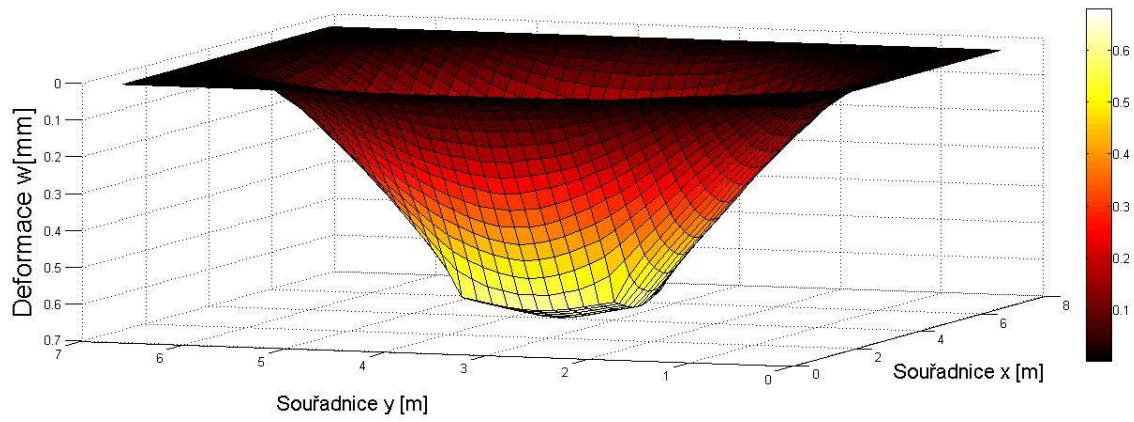
Tento přístup je o mnoho náročnější naprogramovat, avšak přibližné schéma algoritmu je v podstatě totožné jako u příčné úlohy (viz. Kapitola 3.). Výpočetní čas je násobně delší, proto je za nultou iteraci dosazen výpočet z příčné úlohy. Iterační proces se zkrátí na minimum, protože výpočet provádí jen změnu mezi příčnou úlohou a deskovou úlohou. Tato nultá iterace ovšem nelze použít pro každý případ, jako jsou silně nesymetrické konstrukce nebo zatížení. Pro tyto případy je jako nultá iterace použito křivky předem určené např. parabola nebo exponenciální funkce. Odvození matice tuhosti konečného prvku jsem provedl numerickou integrací pomocí pěti bodové Gaussovy metody.

### 4.2 Příklad řešení - základová patka

$x=1,2$  m  
 $y=1,2$  m  
 $h=0,3$ m  
 $E=23$ GPa

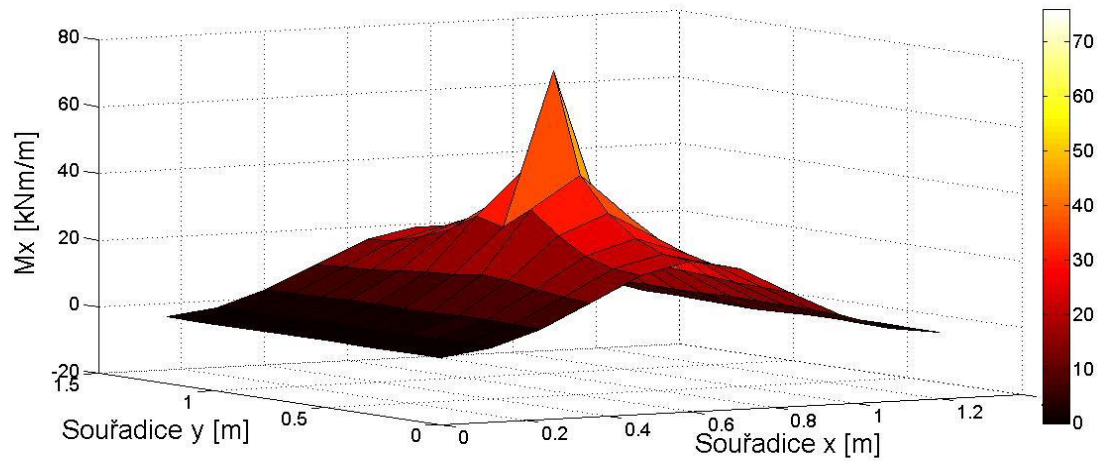
Zatížení uprostřed  $F=100$ kN. Součinitel poddajnosti  $C_1=20000$  kN/m<sup>3</sup>. Součinitel přenášení smykových sil  $C_2=10000$  kN/m.

## Deformace



Obr. 19 Deformace [mm]

## Ohybové momenty



Obr. 20 Ohybové momenty [kNm/m]



## 5 Porovnání deformací dvou výpočetních přístupů

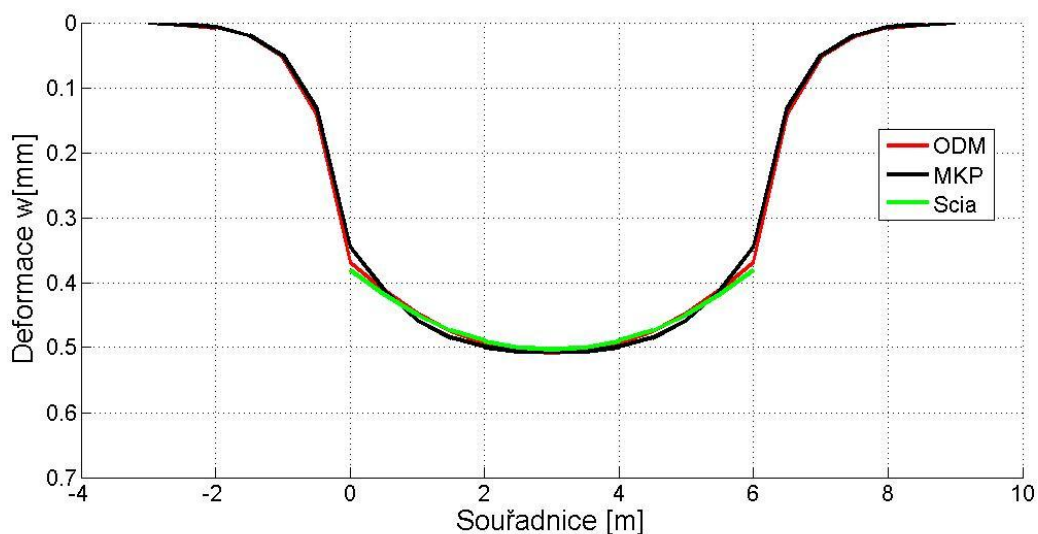
Porovnávám příčnou úlohu pomocí ODM, plošnou úlohu pomocí MKP a komerční software Scia Engineer.

Pro porovnání řešených přístupů a metod je základ zatížen pouze rovnoměrným spojitým zatížením po celé ploše. Tímto se vyvaruji lokálních extrémů pod osamělým břemenem, které bych musel odstranit a porovnání už by nemuselo být úplně korektní, zvláště pokud porovnávám příčnou a plošnou úlohu. Následující příklad je počítán pouze s Pasternakovým modelem podloží, protože u Winklerova modelu docházelo k úplné shodě.

### Zadání

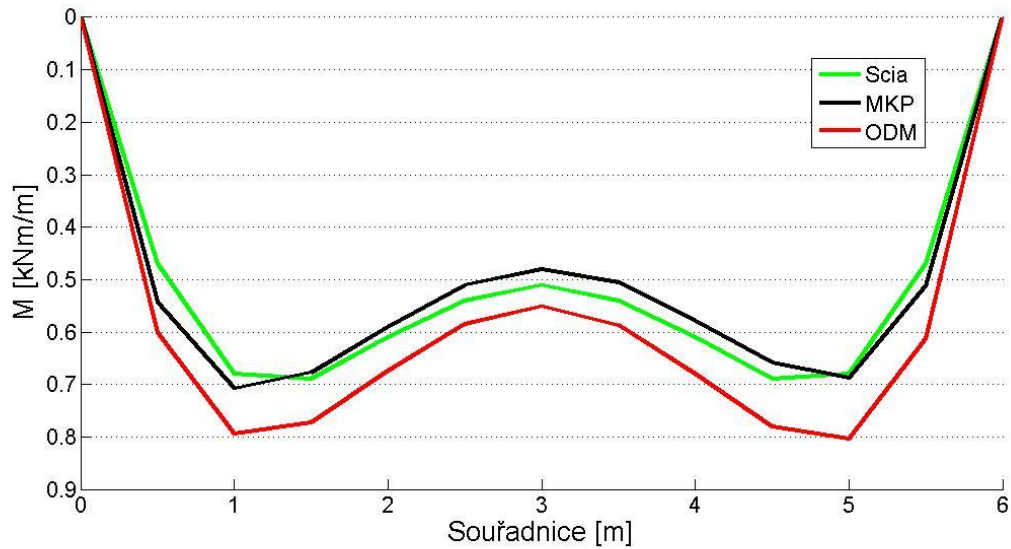
Základová deska o rozměrech 6x12x0,2m je zatížena spojitým rovnoměrným zatížením po celé ploše o velikosti  $10\text{kN/m}^2$ . Součinitel poddajnosti  $C_1=20000\text{ kN/m}^3$ . Součinitel přenášení smykových sil  $C_2=10000\text{ kN/m}$ .

### Deformace



Obr. 21 Deformace [mm]

## Ohybové momenty



Obr. 22 Ohybové momenty [kNm/m]

## Porovnání výsledků

Základ je zadán obdélníkový, kde vykreslené grafy jsou řezy v kratším směru základu, abychom mohli porovnat příčnou a plošnou úlohu.

Z grafu deformací (Obr. 21) můžeme pozorovat výbornou shodu všech výpočetních modelů. Odchylku deformací můžeme zanedbat vzhledem k použité iterativní metodě.

Odchylka ohybových momentů (Obr. 22) je výraznější a to v řádu procent. Tyto grafy jsou si tvarově podobné, ale hodnoty jsou rozdílné zvláště u metody MKP. Odchylku metody MKP přisuzují hlavně odvozením konečných prvků pomocí numerické integrace, kde vznikají numerické chyby. Odchylka mezi příčnou úlohou a výsledky z programu Scia, je cca 20% což by přesně znamenalo roznášení momentů i do kolmého směru při Poissonově konstantě 0,2.

## 6 Kontrola správnosti výpočtu

Jako kontrola výpočtu slouží podmínka, že součet všech vnějších sil na základ musí být roven nule. Pro Winklerův model je tato hodnota velmi blízká nule, vlivem numerické přesnosti vychází v řádech  $10^{-9}$  N při zatížení silou 10kN. Přesnost Pasternakova modelu je vlivem iteračního výpočtu závislá na přesnosti, kterou si zvolíme. Běžně počítané příklady dosahují přesnosti v řádech 1-10 N při zatížení silou 10kN (tzn. pod 0.1% vnějšího zatížení).

Další kontrolu mi nabídla literatura [1], ve které jsou řešeny příklady stejného typu. V této literatuře je však tento problém řešen analyticky s možností působení zeminy v tahu, proto se některé výsledky lišily, ale průhyby uprostřed nosníků vycházely přesně shodně. V ohybových momentech se tato numerická metoda liší velmi podstatně. Z mého řešení plyne, že zavedením smykových sil do výpočtu se ohybové momenty zvýší, což odpovídá logice, protože smykové síly vznikají největší na koncích tuhých nosníků. Tyto smykové síly působí na hrany základu, čímž zvětšují ohybové momenty (obr.20). V této literatuře [1] je tomu naopak, zavedením smykových sil klesá ohybový moment (obr. 19).

Jako významná kontrola slouží porovnání výsledku úlohy příčné (pomocí ODM) a úlohy deskové (pomocí MKP).

V neposlední řadě mi sloužil ke kontrole komerční program Scia Engineer. Porovnání všech metod a přístupů, které jsem řešil, jsou uvedeny v kapitole 4.

## 7 Závěr

Výpočtové modely se od sebe dost liší a zanedbání smykových sil může vést v některých případech k velmi odlišným výsledkům.

Například deska jen spojitě zatížená, má podle Winklérova modelu konstantní průhyb, nulové pootočení i nulové vnitřní síly, kdežto výsledky dle Pasternakova modelu se vlivem smykových sil diametrálně odlišují. V tomto případě vnitřní síly zdaleka nebudou nulové.

Obecně lze říci, že vlivem smykových sil se základová konstrukce méně zaboří a ohybové momenty budou větší. Největší smykové síly působí na okraji základu, kde je funkce průhybů velmi strmá. Právě tyto síly převážně způsobí nárůst ohybových momentů, stejně tak způsobí i nárůst napětí v základové spáře při okrajích základu. Pokud dělíme základový pás na stále více diferencí, tak tato koncentrace napětí roste do velmi vysokých hodnot. Reálně by se zemina v místech těchto koncentrací napětí plasticky deformovala, což Pasternakův model nepřipouští, proto musíme obdobně jako v MKP volit velikost dělení „rozumně“, aby nevznikaly nepřirozeně vysoké napěťové špičky na okraji základu.

## **Použité Materiály**

- [1] Dický, J., Mistríková, Z., Sumec, J. *Pružnost a plasticita v stavebníctve 2.* Slovenská technická univerzita, 2005
- [2] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí II.* Vysoké učení technické v Brně, 2001
- [3] Olehla, M., Tišer, J. *Praktické užití Fortranu 2.* Upravené vydání Nakladatelství dopravy a spojů, Praha, 1979
- [4] Kolář, V., Němec, I. *Studie nového modelu podloží.* Academia, Praha, 1986

## **Poděkování**

Panu doc. Ing. Petru Janasovi, CSc. za odborné vedení a konstruktivní kritiku této práce.